УДК 517.581

О.М. Лисецька

ІНТЕГРАЛЬНІ ЗОБРАЖЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ

We construct integral representations for r-generalized Legendre function and establish the connection with r-generalized Gauss function with integer values of parameters m and n. To this end, we utilize r-generalized Legendre functions of the first and second order, their connection with r-generalized hypergeometric function as well as some of its properties and integral representations. Finally, we prove two lemmas containing the connection formulas between r-generalized Legendre functions of the first and second order and r-generalized Gauss function with integer values of parameters m and n and integral representation for r-generalized Legendre function of the second order. The obtained results permit extending the field of application of r-generalized Legendre functions, in particular for solving boundary-value and other problems of mathematical physics.

Вступ

При вирішенні багатьох проблем математичної фізики виникає потреба розгляду спеціальних функцій. Вперше знаходженням функції, гармонічної всередині деякого сфероїда, за заданими її значеннями на границі займався Г. Ламе в контексті задач теплопровідності. Цю ж задачу розглядав Е. Гейне, який вперше показав, що функції, які входять в розв'язок, є приєднаними функціями Лежандра. Він же побудував розв'язок зовнішньої задачі. К. Нойман отримав розклад оберненої величини відстані між двома точками по сфероїдальних функціях. Дуже важливими для даних досліджень були інтегральні зображення функцій Лежандра. Н.О. Вірченко було запроваджено узагальнення цих функцій [1, 2], завдяки чому з'явилась можливість подальшого розвитку теорії гармонічних функцій, а саме побудови інтегральних зображень узагальнених функцій Лежандра.

Постановка задачі

Мета статті – побудова інтегральних зображень для r-узагальненої функції Лежандра та встановлення зв'язку із r-узагальненою функцією Гаусса при цілих значеннях параметрів m і n.

Тороїдальні функції

Розглянемо тороїдальні функції, які з'являються тоді, коли рівняння Лапласа записується у змінних, одна з яких слугує параметром сім'ї торів, інша – параметром сім'ї сферичних сегментів, а третя – параметром сім'ї півплощин, ортогональних до тих і інших. Рівняння Лапласа у даному випадку матиме вигляд [3]

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta-\cos\theta}\frac{\partial V}{\partial\eta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\operatorname{sh}\eta}{\operatorname{ch}\eta-\cos\theta}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{(\operatorname{ch}\eta-\cos\theta)\operatorname{sh}\eta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=0.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримуємо розв'язки, які виражаються через приєднані функції Лежандра першого і другого роду. У звичайних задачах теорії потенціалу ці функції мають бути періодичними по θ і φ, відповідно, m і n мають бути цілими додатними числами. Таким чином, виникають звичайні та приєднані функції Лежандра цілого порядку та напівцілої степені від дійсного аргументу, не меншого за одиницю. Гармонічні функції вказаного вигляду мають назву тороїдальних. Їх запровадив Нойман у задачі розподілу тепла в твердому тілі, яке має форму тора. Коротко їх розглянув Б. Ріман. Детальному вивченню присвячені роботи У. Хікса, А. Бассета та У. Нівена.

Як внутрішня, так і зовнішня відносно поверхні тора ділянки не однозв'язні. Тому тороїдальні функції не завжди можуть бути прямо застосовні в задачах, у яких має місце циркуляція, оскільки в таких задачах потенціал не завжди визначається однозначно через свої значення на поверхні тора. Хікс розглянув деякі випадки, коли потенціали такого роду можуть бути визначені.

r-узагальнені функції Лежандра першого і другого роду

Сферичні функції $P_n^m(\mu)$ і $Q_n^m(\mu)$ з'являються при розв'язанні рівняння Лапласа для сферичних координат. У працях Гейне, Гобсона [3] та інших подано означення та властивості цих функцій. Означення більш загальних функцій $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$ при довільних значеннях параметрів за допомогою інтегралів, взятих вздовж відповідних контурів у площині μ, з'явились завдяки запровадженню інтегралів по подвійному контуру. Використання інтегралів такого типу дає значну перевагу порівняно з використанням інтегралів, взятих між двома границями, тому що при цьому немає необхідності вибирати сталі так, щоб відповідні інтеграли збігались. Гобсон [3] застосував цей метод для отримання означень функцій $P_n^m(\mu)$ і $Q_n^m(\mu)$, а також провів детальне дослідження властивостей цих функцій. Загальна теорія була також розвинута Барнсом, який використовував для зображення гіпергеометричних функцій контурні інтеграли, що містять під знаком інтеграла гамма-функцію.

Розглянемо узагальнені функції Лежандра першого і другого роду в такому вигляді [2]:

$$ {}_r^{\tau,\beta}P_\nu^\mu(z) = $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}} {}_rF^{\tau,\beta}\left(-\nu,\nu+1;1-\mu;\frac{1-z}{2}\right), \quad (1) $$

$$ {}_r^{\tau,\beta}Q_\nu^\mu(z) = \frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}}\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)}\sqrt{\pi}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}\frac{1}{z^{\nu+\mu+1}}\times $$

$$ \times\, {}_rF^{\tau,\beta}\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1,\frac{\nu+\mu+1}{2};\nu+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right), \quad (2) $$

де ${}_rF^{\tau,\beta}$ — r-узагальнена функція Гаусса [1], що означується таким чином:

$$ {}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z) = \frac{1}{\mathrm{B}(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\times $$

$$ \times\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, $$

де $\mathrm{Re}\,c > \mathrm{Re}\,b > 0$, $r > 0$; $r = 0$, $|z| < 1$; $\mathrm{Re}\,\gamma > {}$ ${} > \mathrm{Re}\,\alpha > 0$, $\{\tau,\beta\}\subset \mathrm{R}$, $\tau > 0$, $\tau-\beta < 1$, $\mathrm{B}(\ldots)$ — звичайна бета-функція [4], ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ — узагальнена (за Райтом) конфлюентна гіпергеометрична функція [5]:

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z) = $$

$$ = \frac{1}{\mathrm{B}(a,c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,{}_1\Psi_1\left[\left.\begin{matrix}(c,\tau)\\(c,\beta)\end{matrix}\right| zt^\tau\right]dt, $$

де ${}_1\Psi_1$ — частковий випадок узагальненої гіпергеометричної функції Фокса–Райта [6]:

$$ {}_p\Psi_q\left[\left.\begin{matrix}(a_i,\alpha_i)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right| z\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{\infty}\Gamma(a_i+k\alpha_i)}{\prod_{j=1}^{\infty}\Gamma(b_j+k\beta_j)}\frac{z^k}{k!}, $$

де $z\in \mathrm{C}$; $\{a_j,b_j\}\subset \mathrm{C}$; $\{\alpha_j,\beta_j\}\subset \mathrm{R}$; $\alpha_i,\beta_j\neq 0$, $i=1,2,\ldots,p$, $j=1,2,\ldots,q$.

При $r=0$ функції (1) і (2) вироджуються у приєднані функції Лежандра першого і другого роду відповідно [3].

Зв'язок із гіпергеометричною функцією при цілих значеннях параметрів m і n

Лема 1. При виконанні умов існування функції $P_n^m(z)$, $Q_n^m(z)$, де $\{n,m\}\subset Z_+$, виконуються такі рівності:

$$ {}_r^{\tau,\beta}P_n^m(\cos\eta) = $$

$$ = \frac{1}{\Gamma(1-m)}\mathrm{ctg}^m\frac{\eta}{2}\,{}_rF^{\tau,\beta}\left(-n,n+1;1-m;\sin^2\frac{\eta}{2}\right), \quad (3) $$

$$ {}_r^{\tau,\beta}Q_n^m(\cos\eta) = \frac{e^{m\pi i}}{2^{n+1}}\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\sqrt{\pi}\frac{\cos\eta}{\sin^{n+2}\eta}\times $$

$$ \times\, {}_rF^{\tau,\beta}\left(\frac{n+m}{2}+1,\frac{n-m}{2}+1;n+\frac{3}{2};\frac{1}{\sin^2\eta}\right). \quad (4) $$

Д о в е д е н н я. Доведення рівності (3) випливає безпосередньо з означення цієї функції. Для доведення рівності (4) запишемо інтегральне зображення для функції ${}_rF^{\tau,\beta}$ при $a=\frac{n+m}{2}+1$, $b=\frac{n+m+1}{2}$, $c=n+\frac{3}{2}$ і $z\to\frac{1}{z^2}$:

$$ {}_rF^{\tau,\beta}\left(\frac{n+m}{2}+1,\frac{n+m+1}{2};n+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right) = $$

$$ = \frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}+1\right)}\times $$

$$ \times\int_0^1 u^{\frac{1}{2}(n+m-1)}(1-u)^{\frac{1}{2}(n-m)}\left(1-\frac{u}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}(n+m+2)}\times $$

$$ \times\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{u(1-u)}\right)du. $$

Перепишемо цю рівність таким чином:

$$ {}_rF^{\tau,\beta}\left(\frac{n+m}{2}+1,\frac{n+m+1}{2};n+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right)= $$

$$ =\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}+1\right)}\left(\frac{1-z^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}(n+m+2)}\times $$

$$ \times\int\limits_0^1 u^{\frac{1}{2}(n+m-1)}(1-u)^{\frac{1}{2}(n-m)}\times $$

$$ \times\left(1-\frac{1-u}{1-z^2}\right)^{-\frac{1}{2}(n+m+2)}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{u(1-u)}\right)du. $$

При $\left|\frac{1-u}{1-z^2}\right|<1$ справедливий такий розклад:

$$ {}_rF^{\tau,\beta}\left(\frac{n+m}{2}+1,\frac{n+m+1}{2};n+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right)= $$

$$ =\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}+1\right)}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}(n+m+2)}z^{n+m+2}\times $$

$$ \times\int\limits_0^1 u^{\frac{1}{2}(n+m-1)}(1-u)^{\frac{1}{2}(n-m)}\left(1+\frac{n+m+2}{2}\frac{1-u}{1-z^2}+\right. $$

$$ \left.+\frac{(n+m+2)(n+m+4)}{2^2 2!}\left(\frac{1-u}{1-z^2}\right)^2+\ldots\right)\times $$

$$ \times{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{u(1-u)}\right)du. $$

Якщо шлях інтегрування вибрано таким чином, щоб була забезпечена рівномірна збіжність, то ряд можна інтегрувати почленно. Маємо

$$ {}_rF^{\tau,\beta}\left(\frac{n+m}{2}+1,\frac{n+m+1}{2};n+\frac{3}{2};\frac{1}{z^2}\right)= $$

$$ =\frac{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+m+1}{2}\right)}\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}+1\right)}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}(n+m+2)}z^{n+m+2}\times $$

$$ \times\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n+m+2}{2}\right)_k {}_{\tau,\beta}\mathrm{B}_{\alpha}^{\gamma}\left(\frac{n-m}{2}+1+k,\frac{n+m+1}{2};r\right)\times $$

$$ \times\frac{(1-z^2)^{-k}}{k!}=(1-z^2)^{-\frac{1}{2}(n+m+2)}\times $$

$$ \times z^{n+m+2}{}_rF^{\tau,\beta}\left(\frac{n+m}{2}+1,\frac{n-m}{2}+1;n+\frac{3}{2};\frac{1}{1-z^2}\right). $$

Підставляючи замість функції ${}_rF^{\tau,\beta}$ останній вираз, отримаємо формулу

$$ {}^{\tau,\beta}_{r}Q_n^m(z)=\frac{e^{m\pi i}}{2^{n+1}}\frac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\sqrt{\pi}z(1-z^2)^{-\frac{1}{2}(n+2)}\times $$

$$ \times{}_rF^{\tau,\beta}\left(\frac{n+m}{2}+1,\frac{n-m}{2}+1;n+\frac{3}{2};\frac{1}{1-z^2}\right), $$

звідки після підстановки $z=\cos\eta$ отримаємо необхідну рівність.

Інтегральні зображення

Лема 2. Якщо виконуються умови існування функції ${}^{\tau,\beta}_{r}Q_{\nu}^{\mu}$, то справедливі такі інтегральні зображення для цієї функції:

$$ {}^{\tau,\beta}_{r}Q_{\nu}^{\mu}(\sin\eta)=\frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}}\frac{2\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}\times $$

$$ \times\sqrt{\pi}\sin\eta\cos^{\mu}\eta(-1)^{\frac{\mu}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin\varphi)^{\nu+\mu}(1-\cos\varphi)^{\nu-\mu+1}}{(\sin^2\eta-\sin^2\varphi)^{\frac{\nu+\mu}{2}+1}}\times $$

$$ \times{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{4r}{\sin^2 2\varphi}\right)d\varphi, \tag{5} $$

$$ {}^{\tau,\beta}_{r}Q_{\nu}^{\mu}(\operatorname{cth}\eta)= $$

$$ =\frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}}\frac{2\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)}\operatorname{ch}\eta\sqrt{\pi}\operatorname{sh}^{\nu+1}\eta\times $$

$$ \times\int\limits_0^{\infty}\frac{(\operatorname{ch}\varphi)^{\mu-\nu}(\operatorname{sh}\varphi)^{\nu+\mu}}{\operatorname{ch}^{\frac{\nu+\mu}{2}+1}(\eta+\varphi)\operatorname{ch}^{\frac{\nu+\mu}{2}+1}(\eta-\varphi)}\times $$

$$ \times{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r\operatorname{ch}^4\varphi}{\operatorname{sh}^2\varphi}\right)d\varphi, \tag{6} $$

$$ {}^{\tau,\beta}_{r}Q_{\nu}^{\mu}(\operatorname{ch}\eta)= $$

$$= \frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}} \frac{2\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)} \operatorname{ch}\eta\sqrt{\pi}\operatorname{sh}^{\mu}\eta \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{sh}\varphi)^{\mu-\nu}(\operatorname{ch}\varphi-1)^{\nu-\mu+\frac{1}{2}}}{\left(\operatorname{ch}^2\eta\operatorname{ch}^2\frac{\varphi}{2}-1\right)^{\frac{\nu+\mu}{2}+1}} \times$$

$$\times\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r\operatorname{sh}^4\varphi}{2(\operatorname{ch}\varphi-1)^3}\right)d\varphi. \qquad (7)$$

Доведення. Для доведення даних зображень скористаємось відомими [7] інтегральними зображеннями для r-узагальненої функції Гаусса при $a = \frac{\nu+\mu}{2}+1$, $b = \frac{\nu+\mu+1}{2}$, $c = \nu + \frac{3}{2}$, $z \to \frac{1}{z^2}$ і виконаємо нескладні перетворення:

$${}^{\tau,\beta}_{r}Q_{\nu}^{\mu}(z) = \frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\pi}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} \frac{1}{z^{\nu+\mu+1}} \times$$

$$\times \frac{2}{B\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu-\mu}{2}+1\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\varphi)^{\nu+\mu}(1-\cos\varphi)^{\nu-\mu+1}}{\left(1-\frac{1}{z^2}\sin^2\varphi\right)^{\frac{\nu+\mu}{2}+1}} \times$$

$$\times\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{4r}{\sin^2 2\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}} \frac{2\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)} \sqrt{\pi}z(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin\varphi)^{\nu+\mu}(1-\cos\varphi)^{\nu-\mu+1}}{(z^2-\sin^2\varphi)^{\frac{\nu+\mu}{2}+1}}\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{4r}{\sin^2 2\varphi}\right)d\varphi;$$

$${}^{\tau,\beta}_{r}Q_{\nu}^{\mu}(z) = \frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\pi}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} \frac{1}{z^{\nu+\mu+1}} \times$$

$$\times \frac{2}{B\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu-\mu}{2}+1\right)} \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{ch}\varphi)^{\mu-\nu}(\operatorname{sh}\varphi)^{\nu+\mu}}{\left(\operatorname{ch}^2\varphi-\frac{1}{z^2}\operatorname{sh}^2\varphi\right)^{\frac{\nu+\mu}{2}+1}} \times$$

$$\times\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r\operatorname{ch}^4\varphi}{\operatorname{sh}^2\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}} \frac{2\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)} \sqrt{\pi}z(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{ch}\varphi)^{\mu-\nu}(\operatorname{sh}\varphi)^{\nu+\mu}}{(z^2\operatorname{ch}^2\varphi-\operatorname{sh}^2\varphi)^{\frac{\nu+\mu}{2}+1}}\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r\operatorname{ch}^4\varphi}{\operatorname{sh}^2\varphi}\right)d\varphi;$$

$${}^{\tau,\beta}_{r}Q_{\nu}^{\mu}(z) = \frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\nu+\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\pi}(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} \frac{1}{z^{\nu+\mu+1}} \times$$

$$\times \frac{2}{B\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}, \frac{\nu-\mu}{2}+1\right)} \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{sh}\varphi)^{\mu-\nu}(\operatorname{ch}\varphi-1)^{\nu-\mu+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2}\operatorname{ch}\varphi\right)^{\frac{\nu+\mu}{2}+1}} \times$$

$$\times\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r\operatorname{sh}^4\varphi}{2(\operatorname{ch}\varphi-1)^3}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{e^{\mu\pi i}}{2^{\nu+1}} \frac{2\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)} \sqrt{\pi}z(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{(\operatorname{sh}\varphi)^{\mu-\nu}(\operatorname{ch}\varphi-1)^{\nu-\mu+\frac{1}{2}}}{\left(z^2\frac{1+\operatorname{ch}\varphi}{2}-1\right)^{\frac{\nu+\mu}{2}+1}}\, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r\operatorname{sh}^4\varphi}{2(\operatorname{ch}\varphi-1)^3}\right)d\varphi.$$

В отриманих зображеннях виконаємо такі підстановки змінних:

$$z = \sin\eta,\ z = \operatorname{cth}\eta,\ z = \operatorname{ch}\eta,$$

звідки після спрощень і отримаємо необхідні рівності.

Висновки

У статті було побудовано інтегральні зображення для r-узагальненої функції Лежандра і встановлено зв'язок із r-узагальненою гіпергеометричною функцією при цілих значеннях параметрів m і n, що дає можливість зробити ще один крок у розвитку теорії гармонічних функцій Отримані результати можуть бути застосовані при розв'язку крайових задач математичної фізики та інших прикладних задач. Існує можливість побудови інших видів інтегральних зображень для розглянутих узагальнених функцій Лежандра. У майбутньому доцільно розширити область практичного застосування отриманих інтегральних зображень для розв'язку інтегральних рівнянь із r-узагальненими функціями Лежандра.

1. *Вирченко Н.А.* О некоторых обобщениях функций гипергеометрического типа и их применении // Наука – образованию, производству, экономике: Мат. VII Междунар. научно-техн. конф. Беларусь. – Беларусь: Техн. ун-т. – 2009. – 2. – С. 154.
2. *Kalla S.L., Virchenko N., Lisetska O.* Some results involving generalized associated Legendre functions. Integral Transforms and Special Functions. – http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10652469.2011.564379#preview
3. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952. – 476 с.
4. *Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G.* Higher Transcendental Functions. 1. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 302 p.
5. *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application // J. Fractional Calculus and Appl. Analysis. – 2006. – 9, N 2 – P. 101–108.
6. *Kilbas A.A., Saigo M.* H-Transforms. – London: Chapman and Hall / CRC, 2004. – 390 p.
7. *Вірченко Н.О., Лисецька О.М., Овчаренко О.В.* До теорії узагальнених функцій гіпергеометричного типу та їх застосування // Доп. НАН України. – 2009. – № 5. – С. 7–15.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
20 травня 2011 року